

KRISTÍN BJARNADÓTTIR

## Arithmetica — það er reikningslist

Rætur í menningu mótmælenda

Prentun barst til Íslands laust fyrir miðbik 16. aldar en engar kennslubækur í reikningi voru prentaðar á Íslandi fyrr en um og eftir miðja 18. öld. Þrátt fyrir skort á prentuðu efni á móðurmálinu gengu manna á milli uppskriftir af furðugóðum reikningsbókum sem sóttu fyrirmyndir í alþjóðlega hefð. Einnig hafa varðveist heimildir um erlendar reikningsbækur í eigu kirkna, presta, dánarbúa og biskupsstóla. Í þessari grein verður fjallað um reikningsbókarhandrit frá 18. öld sem hefur titilinn *Arithmetica — það er reikningslist*. Það ber vott um áhrif frá ýmsum ritum, þeirra á meðal kennslubókum í reikningi frá svæðum mótmælenda á 16. og 17. öld. Á forsíðu þess segir: „Arithmetica — það er reikningslist — sem er sá lærdómur er höndlar um tölunnar náttúru og ásigkomulag samt hennar brúkun og nytsemi. 1. kap. um numerationem eður töluna.“

*Arithmetica — það er reikningslist* er varðveitt í handritinu ÍB 217 4to. Handritið er 66 blöð (198 mm × 159 mm), 132 bls., ritað af óþekktum skrifara. Ritið skiptist í þrjár bækur. Fyrsta bók fjallar um heilar tölur og reikniadgerðir með þeim, önnur bók um (almenn) brot og hin þriðja um hlutfallareikning í formi þríliðu. Handritinu lýkur snögglega eftir 21. bls. af þriðju bók. Samkvæmt skrá handritasafns Landsbókasafns Íslands – Háskólabókasafns er það talið ritað um 1750. Efni ritsins bendir þó til að það sé samið árið 1721. Ólíkt öðrum hagnýtum reikningsbókum er ekki að finna útskýringar í *Arithmetica — Reikningslist* á mælieiningum og mynteiningum sem nauðsynlegt var að þekkja í viðskiptum við erlenda kaupmenn. *Arithmetica — Reikningslist* er svo sneydd tilvísun til Íslands og íslensks samfélags að hún hlýtur að vera sniðin eftir erlendri fyrirmynd. Ýmsar bækur geta verið fyrirmynd hluta ritsins. Hér á eftir verða raktar tilgátur um slíkar fyrirmyndir, en fyrst verður hefð reikningsbóka rakin og skýrð.

## Grunngerðir reikningsbóka

Tvær rætur liggja að evrópskum reikningsbókum.<sup>1</sup> Annars vegar voru fræðirit, *theoretica*, rituð á latínu, samskiptamáli miðalda. Elsti grunnur þeirra er rit Evklíðs, *Frumatriði* (gr. Στοιχεῖα Stoicheia; lat. Elementum) frá um 300 f.Kr. Frumatriði er grundvallarrit stærðfræðinnar í 13 bókum. Fyrstu sex bækurnar fjalla um flatarmálsfræði en bækur 7–9 um talnafræði. Frumatriði voru Vesturlandabúum að mestu ókunn fram til um 1120 er ritið var þýtt á latínu úr arabísku. Afrit af Frumatriðum á grísku, eftir gerð Grikkjans Peons (330–405), fannst árið 1533. Nú er stuðst við vísindalega útgáfu Thomas L. Heaths<sup>2</sup> á ensku frá 1908. Hún er byggð á gerð Peons og afriti af enn eldri útgáfu.<sup>3</sup> Til fræðirita heyrðu einnig rit um reikning á talnagrind (lat. abacus) en hún var notuð með rómverskri talnaritun. Stærðfræði tilheyrði ferveginum, *quadrivium*, í dómkirkjuskólum miðalda. Reikningur, rúmfræði, tónlist og stjörnufræði töldust til fervegarins. Líklega hefur tímataalsreikningur verið iðkaður innan fervegarins.

*Algorismar* voru rit sem rekja má til þýðinga á bók Muhammads ibn-Mūsā al-Khwārizmī (um 780 – um 850), *Kitāb al-jam' w' al-tafrīq bi-hisāb al-Hind* [*Bókin um samlagningu og frádrátt með aðferð Indverja*]. Til eru nokkrar þýðingar á þessu riti á latínu, flestar frá 12. öld.<sup>4</sup> Samin voru upp úr því rit fyrir skólasveina á latínu. Meðal þeirra voru *Carmen de Algorismo*, skólaljóð í sexliðahætti eftir franska kanúkan Alexander de Villa Dei<sup>5</sup> frá um 1200, og *Algorismus* í *Hauksbók*<sup>6</sup>, þýðing á *Carmen de Algorismo* í óbundnu máli með ný-þýðingum viðbótum. Annað útbreitt rit af sama tagi var *De Algorismo* eftir Johannis de Sacrobosco, ritað um 1225.

Hins vegar urðu til hagnýtar bækur fyrir kaupmenn, *practica*, ritaðar á móðurmálinu, fyrst á Ítalíu þar sem þær nefndust *libri di abbaco*. Þetta voru handbækur um verslunarreikning til hagnýtra nota og geymdu sýnidæmi af ýmsu tagi. Þær áttu ekki að vera fræðirit með heimspekilegum vangaveltum um eðli talna. Efni þeirra var indóarabísk talnaritun, mælieiningar og gjaldmiðlar, auk reikniadgerðanna fjögurra, samlagningar, frá-

<sup>1</sup> Kristín Bjarnadóttir, „History of arithmetic teaching“, bls. 432–436.

<sup>2</sup> [Evklíð], *The Thirteen Books of Euclid's Elements*.

<sup>3</sup> Katz, *A History of Mathematics*, bls. 55–56.

<sup>4</sup> Sama heimild, bls. 268; Rashed, „Préface“, bls. ii–iii.

<sup>5</sup> *The Earliest Arithmetics in English*, bls. 72–80.

<sup>6</sup> *Hauksbók*, bls. 417–424.

dráttar, margföldunar og deilingar, í heilum tölum og brotnum. Oft fylgdu hlutföll í formi þríliðu, *Regula Trium*, og jafnvel rótardráttur og hlutfalla-runur.

Fyrsta prentaða bókin af þessu tagi var ítölsk, *Treviso Arithmetica*, frá 1478. Hefðin fluttist eftir verslunarleiðum norður til Þýskalands. Þar komu fram reiknimeistarar, reikniskólar og prentaðar bækur á móðurmálinu. Dæmi um þær eru *Das Bamberger Rechenbuch* frá 1483 og bók eftir Adam Ries (1492–1559), *Rechnung auff der linihen und federn* [Reikningur með talnagrindum og penna] frá 1522. Flestar þýskar bækur um reikning fram á 17. öld voru sjálfsnámsbækur miðaðar við viðskipti.<sup>7</sup>

Í fræðilegu bókunum var mikið rætt um eiginleika talnahugtaksins en sjaldan um gjaldmiðla og mælieiningar. Með tímanum blönduðust þessar gerðir reikningsbóka saman enda báðar að grunni til arfleifð bókar al-Khwārizmīs um reikning með aðferð Indverja. Kennslubækur í reikningi fyrir unglina um alla Vesturálfu báru snið hagnýtu reikningsbókanna um verslun og viðskipti, gjaldmiðla og mælieiningar, langt fram á 20. öld.

### *Reikningsbækur mótmælenda*

Helstu heimildir um stöðu reikningskennslu í Þýskalandi á siðaskiptatím-  
anum á 16. öld eru skólareglugerðir og námsbækur. Kennsla í stærðfræði  
hafði verið innan ramma fervegarins í dómkirkjuskólum og síðar háskólum  
þar sem numin voru latnesk skólaljóð á borð við Carmen de Algorismo  
með rætur í verki al-Khwārizmīs. Prentuðum bókum þýskra reiknimeist-  
ara um indóarabíska talnaritun fór fjölgandi. Hún var því orðin vel kunn í  
Þýskalandi í þann mund sem mótmælendahreyfing Lúthers tók að eflast.  
Elsta þýska prentaða skólareglugerðin fyrir latínuskóla var fyrir Zwickau frá  
1523. Hún mælir skýrt fyrir um reikningskennslu í latínuskólum, bæði  
með arabískri og latneskri talnaritun.<sup>8</sup> Kennslan fór að mestu fram á  
móðurmálinu, þýsku. Um helmingur reikningsbóka sem gefnar voru út á  
16. öld í Þýskalandi var ritaður á latínu en einungis fjórðungur þeirra sem  
gefnar voru út á 17. öld; aðrar voru ritaðar á móðurmálinu.<sup>9</sup> Reiknings-  
menntin var þannig smám saman færð nær almenningi.

<sup>7</sup> Grosse, *Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts*, bls. 24–26.

<sup>8</sup> Sama heimild, bls. 12.

<sup>9</sup> Sama heimild, bls. 70–71.

Helstu uppeldisfrömuðir 16. aldar voru hlyntir stærðfræðikennslu og þeir Marteinn Lúther (1483–1546) og Philip Melanchthon (1497–1560), samverkamaður hans, voru þar framarlega í flokki. Lúther ritaði í bréfi til borgarstjóra og ráðherra í mörgum þýskum ríkjum og furstadæmum árið 1524: „Ef ég gæti átt og ætti börn þá yrðu þau ekki aðeins að láta mig heyra tungumál og sögu heldur einnig að syngja og læra um tónlist og stærðfræði.“<sup>10</sup> Melanchthon var prófessor í grísku við háskólann í Wittenberg en las fyrir um stærðfræði til hliðar við fræðigrein sína. Hann hafði hlýtt á fyrirlestra í stærðfræði í Tübingen í þrjú ár og honum lá stærðfræðikennsla sérstaklega á hjarta.<sup>11</sup>

Sigismund Suevus (1526–1596) var nemandi Melanchthons við háskólann í Wittenberg.<sup>12</sup> Suevus samdi kennslubók í reikningi á þýsku. Bókin nefndist fullu nafni *Arithmetica Historica — die Löbliche Rechenkunst Durch alle Species und fürnembste Regeln mit schönen gedenckwürdigen Historien und Exempeln; Auch mit Hebraischer, Griechischer, und Römischer Müntze, Gewicht und Mass, deren in heiliger Schrift und gutten Geschichtbüchern gedacht wird* [Söguleg reikningsbók — hin lofsverða reiknilist með öllum reikniaðgerðum og virðulegustu reglum með fögrum umhugsunarverðum sögum og dæmum; einnig með hebreskum, grískum og rómverskum myntum, vigt og máli, sem minnst er á í heilagri ritningu og góðum sögubókum] og var hún 527 bls. Hún kom út árið 1593 í borginni Breslau í Slésíu sem þá var á svæði mótmælenda. Bókin var sniðin eftir hagnýtum bókum kaupmanna og ætluð verslunarstéttinni, en líka latínuskólunum. Suevus ræddi ekki um talnahugtakið, eins og algengt var í eldri bókum fyrir latínuskóla, heldur fór beint í að útskýra sætisrithátt talna og reikniaðgerðirnar fjórar, samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu, með því að nota dæmi úr Biblíunni og sögubókum. Ekki var fengist við aðgerðir með almennum brotum.

Um þremur áratugum síðar, árið 1625, kom út bók eftir Georg Meichsner undir svipuðu nafni: *Arithmetica Historica. Das ist: Rechenkunst durch alle Species und fürnembsten Regeln, mit schönen Denckwürdigen Historien und Exemplis auß H. Göttlicher Schrift, und guten Geschichtbüchern genommen [...]* [Söguleg reikningsbók. Það er reiknilist með öllum reikniaðgerðum og

<sup>10</sup> Sama heimild, bls. 13, þýðing höfundar.

<sup>11</sup> Sama heimild, bls. 13.

<sup>12</sup> Sama heimild, bls. 28–70.

virðulegustu reglum með fögrum umhugsunarverðum sögum og dæmum teknum úr h[eilagri] guðdómlegri ritningu og góðum sögubókum [...]]. Bókin geymir svipuð dæmi og bók Suevuser en var aðeins um 100 bls. Hún var gefin út í Rothenburg ob der Tauber sem einnig var á yfirráðasvæði mótmælenda.<sup>13</sup> Í hvorugri bókinni er farið í reikninga með almennum brotum og tugabrot voru ekki enn orðin útbreidd.

### *Reikningsbækur 16. og 17. aldar*

Þekktar eru nokkrar útbreiddar norður-evrópskar reikningsbækur á 16. og 17. öld áður en nokkur reikningsbók var prentuð á íslensku. Sumar þeirra voru í eigu íslenskra biskupa, biskupsstóla, presta og dánarbúa. Þessar eru helstar:

- *Arithmeticae practicae methodus facilis* eftir Gemma Frisius [Jemme Reinerszoon] (1508–1555), gefin út í Antwerpen árið 1540 á latínu. Alls birtust 59 útgáfur af bókinni. Hún var í eigu dánarbús sr. Stefáns Einarssonar árið 1754.<sup>14</sup>
- *Arithmeticae libri Duo* eftir Petrus Ramus (1515–1572), gefin út í Basel árið 1569 á latínu. Hún var í eigu Brynjólfs biskups Sveinsonar (1605–1675).<sup>15</sup>
- *L’Aritmetique*, rituð á frönsku, og *de Thiende*, bók um tugabrot á hollensku, voru tímamótabækur eftir Simon Stevin (1548–1620), báðar gefnar út í Leiden árið 1585.
- *Universae Geometriae Synopsis* eftir Marin Mersenne (1588–1648), gefin út í París árið 1644 á latínu.
- *Arithmetica Danica* eftir Geo Frommiius, Jørgen From (1605–1651), gefin út í Kaupmannahöfn árið 1649 á latínu. Bókin var til í Skálholti árið 1744.<sup>16</sup> From var kennari Gísla Einarssonar, sem fyrstur manna var skipaður kennari með konungsbréfi í stærðfræðilegum greinum í Skálholti. Hann varð síðar skólameistari þar.<sup>17</sup>

<sup>13</sup> Sama heimild, bls. 70–80.

<sup>14</sup> Ulf-Møller, „Stefán Einarssons Isländisches Rechenbuch von 1736“, bls. 220.

<sup>15</sup> Jón Helgason, „Bókasafn Brynjólfs biskups“, bls. 120.

<sup>16</sup> Hörður Ágústsson og Kristján Eldjárn, *Skálholt, skróði og áhöld*, bls. 347.

<sup>17</sup> Einar H. Guðmundsson, „Gísli Einarsson skólameistari og vísindaáhugi Íslendinga á 17. öld“, bls. 185–201.

- *Compendium Arithmeticum eller Vejviser* eftir Søren Matthisen (1653–1740) var gefin út í Kaupmannahöfn árið 1680, á dönsku. Bókin var í eigu dánarbús sr. Stefáns Einarssonar.<sup>18</sup>
- *Cocker's Arithmetick* eftir Edward Cocker (1631–1676), rituð á ensku, var fyrst gefin út árið 1679 í London. Hún kom út í fjölmörgum útgáfum og var notuð bæði í Bretlandi og Bandaríkjunum.
- *Tradesman's Treasury* eftir Edward Hatton (1664–1733+) var gefin út í London árið 1695 á ensku. Sr. Halldór Brynjólfsson biskup þýddi útdrátt úr henni á íslensku, *Lítið ágrip um þær fjórar species í reikningskonstinni*, sem var gefinn út árið 1746 á Hólum.

Skort á kennslubókum í reikningi á móðurmálinu reyndu menn að bæta upp með þýðingum eða ágrípum á íslensku og jafnvel frumsömdum ritum sem gengu manna á milli í uppskriftum. Tilvera handritanna ber vitni um að Íslendingar lögðu sig fram um að laga evrópska menntun og menningu að eigin tungumáli eins og tíðkast hafði allt frá miðöldum. Fyrir siðaskiptin 1550 og löngum síðar var þýtt og endursagt úr latínu, t.d. stærðfræðiritið *Algorismus*. Efni frá norður-evrópskum mótmælendalöndum, t.d. þýskt og danskt efni, virðist gjarnan hafa orðið fyrir valinu til þýðingar eftir siðaskipti. Eftirfarandi handrit með reikningsbókum á íslensku, allt frá 17. öld, eru varðveitt ásamt fleirum í handritadeild Landsbókasafns Íslands – Háskólabókasafns:

- ÍB 35 fol., *Gandreid* (1660, afrit 1770–80) sem Lýður Björnsson hefur skrifað um.<sup>19</sup>
- Lbs 1694 8vo, *Arithmetica Islandica* (1716/1733?). Skúli Magnússon landfógeti segir föður sinn, Magnús Einarsson (1675–1728), hafa ritað reikningsbók sniðna eftir *Arithmetica Danica*.<sup>20</sup> Sú bók gæti verið *Arithmetica Islandica* tímans vegna. Einhver líkindi eru með þessum tveimur ritum en ekki mikil.
- ÍB 217 4to, *Arithmetica — það er reikningslist* (1721, afrit um 1750), sem nánar verður fjallað um.
- Lbs 1318 8vo, *Limen Arithmeticum eður einfaldlegur inngangur til réttilegs náms og brúkunar þeirrar nafnfrægu reikningslistar* (1736,

<sup>18</sup> Ulf-Møller, „Stefán Einarssons Isländisches Rechenbuch von 1736“, bls. 220.

<sup>19</sup> Lýður Björnsson, „Glefsa úr Gandreið“.

<sup>20</sup> Skúli Magnússon, „Skúli Magnússon“, bls. 45.

handrit 1777), eftir sr. Stefán Einarsson í Laufási, til í fleiri handritum.<sup>21</sup>

- *Stutt undirvísan um Arithmetícám Vulgarem eða almenniliga reikningslist*, Lbs 409 8vo (skr. 1770–1780). Handritið er uppkast Ólafs Stefánssonar, síðar stiftamtmanns, að bók hans sem var gefin út árið 1785.<sup>22</sup>

Spyrja má hver þessara kennslurita hafi verið samin á Íslandi eða hvort þau hafi verið staðfærðar þýðingar. Þá væri áhugavert að vita hvaða evrópskar kennslubækur voru fyrirmyndir þeirra. *Arithmetica Islandica* verður aðeins nefnd stuttlega í þessari grein. Sjónum verður aðallega beint að handritinu ÍB 217 4to, *Arithmetica — það er reikningslist*. Það hefur sérstöðu að því leyti að það geymir fleiri og djúpstæðari atriði sem flokkast til fræðilegra áhrifa en hin handritin, einkum umfjöllun um talnahugtakið og eininguna. Einnig er sérstakur kafli í handritinu um almenn hugtök um reikning sem rekja má til Frumatriða eftir Evklíð. Að öðru leyti er efni handritsins talnaritun, reiknaðgerðirnar fjórar í heilum tölum og brotnum, hlutföll og runur í mjög einföldu formi, dráttur ferningsrótar og þríliða (lat. *Regula Trium*). Höfundur ritsins virðist hafa orðið fyrir áhrifum af ýmsum erlendum ritum. Meðal annars má finna allmörg reikningsdæmi úr kennslubókum frá svæðum mótmælenda á 16. og 17. öld. Verður nú farið yfir nokkur efnisatriði í þeirri röð sem þau koma fyrir í handritinu og grein gerð fyrir skyldleika við aðrar bækur.

## Talnahugtakið

Rit al-Khwārizmī, um reikning með aðferð Indverja, var þýtt á latínu á 11. og 12. öld. Nokkrar mismunandi útgáfur urðu til. Í einni þeirra, *Dixit Algorizmi*, sem var þýdd um 1100 og talin næsta orðrétt þýðing á riti al-Khwārizmī,<sup>23</sup> segir:

[...] sérhver tala er samsett úr einingunni [...] Og það er það sem segir í annarri bók um reikning að einingin er upphaf allrar tölu og utan talna.<sup>24</sup>

<sup>21</sup> Ulf-Møller, „Stefán Einarssons Isländisches Rechenbuch von 1736“, bls. 220–223.

<sup>22</sup> Kristín Bjarnadóttir, „Stutt undirvísan í Reikningslistinni og Algebra. Leitað höfundar“, bls. 532–547.

<sup>23</sup> Rashed, „Préface“, bls. iii.

<sup>24</sup> Al-Khwārizmī, *Le Calcul Indien*, bls. 1.

Pessi önnur bók er talin vera *Frumatriði talnafræðinnar* (gr. Arithmētikē eisagōgē) eftir Níkómakkos frá Gerasa. Bøþíus, sem uppi var um 500, mun hafa þýtt bókina á latínu en þýðingin er nú glötuð. Níkómakkos var uppi um 100 og er talinn til nýpýþagóringa. Hugmyndin um að einn sé ekki tala heldur aðeins upphaf allrar tölu gæti verið túlkun hans á Frumatriðum Evklíðs. Í Frumatriðum er ekki nefnt að einn sé ekki tala, hann sé utan talna. Þar segir einungis:

Eining er það sem eftir eiginleika sérhvers hlutar er nefnt einn. Tala er fjöldi samsettur úr einingum.<sup>25</sup>

Ritgerðin *Algorismus* er íslensk þýðing frá 13. öld á latneska skólaljóðinu *Carmen de Algorismo*. Svo segir í *Algorismus*: „[...] einn er hvorki [jöfn né ójöfn tala] því að hann er eigi tala heldur upphaf allrar tölu“,<sup>26</sup> en þessa klausu er ekki að finna í *Carmen*. Frumatriði munu aðallega hafa verið þekkt í þýðingum úr arabísku á 12. öld, e.t.v. í túlkun Níkómakkosar.

Á 16. öld voru sumir menn teknir að efast um réttmæti þess að einn teldist ekki vera tala. Petrus Ramus, Pierre de la Ramée (1515–1572), var húanisti og fremur uppeldisfrömuður en stærðfræðingur. Brynjólfur Sveinsson biskup mun hafa haft á honum mætur. Ramus hélt því fram við meistaraþrófsvörn sína að Aristóteles hefði rangt fyrir sér í flestu á tímum þegar kenningar Aristótelesar töldust til rétttrúnaðar. Hann gerðist mót-mælandi árið 1561 og var myrtur á Bartólómeusarmessu árið 1572. Ramus ritaði eigin endurskoðaða útgáfu af Frumatriðum Evklíðs. Bók hans, *Arithmeticae libri Duo*, fjallar um efni 7. bókar. Þar segir: „[...] tala hefur eiginleika einingar og fjölda: hún getur verið jafnlítill og einn [...]“<sup>27</sup>

Simon Stevin (1548–1620) var Hollendingur, alinn upp meðal kalvínista, og nam við háskólann í Leiden. Hann er þekktur fyrir að hafa innleitt tugabrot í Evrópu með bók sinni *De Thiende*. Hann ritaði einnig *l'Arithmetique* um reikning þar sem hann sagði:

Ef þrír er gefin tala og við drögum einn frá henni sem — eins og þið haldið fram — er ekki tala, þá stendur gefna talan eftir, það er þrír verða afgangs, sem er fjarstæða.<sup>28</sup>

<sup>25</sup> [Evklíð], *The Thirteen Books of Euclid's Elements* 2, bls. 277, þýðing höfundar úr ensku.

<sup>26</sup> *Hauksbók*, bls. 418.

<sup>27</sup> Vef. Ramus, *Arithmeticae libri Duo*, bls. 1, þýðing höfundar úr latínu.

<sup>28</sup> Stevin, *l'Arithmetique*, bls. 494–504, þýðing höfundar úr ensku.



Sömu röksemdafærslu er að finna í Cocker's Arithmetick. Skilningur Stevins endurómar einnig í Arithmetica — Reikningslist þar sem segir:

Margir af þeim lærðu mathematicis hafa viljað halda að 1, unitas, væri ei tala, numerus, heldur væri talan fjöldi af 1, ex unitatibus, til samans lagður við, Evcl: Elementa Lib. 7 Def. 2, hvað um 1 kynni ei segjast, einasta álitid unitatem, sem upphaf og undirrót til allrar tölu.

Aðrir þar í mót meina að 1 eigi að kallast tal, því hann geti í sér innibundið marga parta af þessum hann sé samsettur. Þar að auki ef 1 væri ei tal skyldi annað tal, til dæmis 5, vera eins margt þó 1 væri þar af tekinn, þar þó allir skilja, að ei þann aftur utan 4.<sup>29</sup>

Þessi ályktun ber vott um skyldleika við röksemdir Stevins og Cockers en gamli skilningurinn, að einn væri ekki tala, var ekki kveðinn niður fyrir en á 19. öld.<sup>30</sup>

## Talnaritun

Fyrstu viðfangsefni reikningsbóka eru gjarnan að útskýra hvernig tölur eru ritaðar í sætiskerfi, oft með mjög stórum tölum. Öll fimm dæmin í Arithmetica — Reikningslist um stórar tölur eiga sér samsvarandi dæmi í þýsku bókunum Arithmetica Historica, eftir þá Suevus og Meichsner, og Einleitung zur Rechenkunst eftir Leonhard Euler (1707–1783), sjá töflu 1. Euler var frjóasti stærðfræðingur heims á 18. öld. Hann fæddist í Basel, sonur mótmælendaprests, og móðurafinn var einnig prestur mótmælenda. Euler bjó í St. Pétursborg í Rússlandi árið 1738. Þar gaf hann út *Einleitung zur Rechenkunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg* [Inngangur að reiknilist til nota í menntaskólanum við keisaralegu vísindaakademíuna í St. Pétursborg].

Efni dæmanna í Arithmetica — Reikningslist er eftirfarandi:

1. Fjöldi ára frá upphafi heimsins þar til Kristur fæddist: 3970 ár.
2. Kostnaður við byggingu musteris Salómons konungs: 13.695.380.050 Coronatos krónur.

<sup>29</sup> ÍB 217 4to, bls. 1–2 (Arithmetica — það er reikningslist).

<sup>30</sup> Kristín Bjarnadóttir, „The numbers one and zero in northern European textbooks“, bls. 3–20.



## *Almennar staðreyndir*

Venja er í fræðilegum stærðfræðibókum að skrá niður almennar staðreyndir sem gengið er út frá. Þær hljóða svo í Frumatriðum Evklíðs:<sup>35</sup>

1. Stærðir sem eru jafnar sömu stærðinni eru jafnar.
2. Þegar jafnar stærðir eru lagðar við jafnar stærðir verða summurnar jafnar.
3. Þegar jafnar stærðir eru dregnar frá öðrum jöfnum stærðum verða afgangarnir jafnir.
4. Stærðir sem geta þakið hvor aðra eru jafnar.
5. Heild er stærri en hluti hennar.

Lista yfir 13 almennar staðreyndir er að finna í útgáfu Mersennes, *Universae Geometriae*,<sup>36</sup> á Frumatriðum. Marin Mersenne (1588–1648) var franskur stærðfræðingur og heimspekingur sem studdi kenningar Galíleós Galilei á efri árum. Hann gekk í klaustur og lést þar. Hann er kunnur fyrir rannsóknir á frumtölum en einnig fyrir að hafa stýrt hópi vísindamanna, þeirra Fermats, Pascals, Descartes og fleiri, og miðla á milli þeirra hugmyndum. Descartes er einmitt þekktur fyrir að neita að trúa öðru en því sem hann hafði sjálfur sannreynt.

Hinn nafnlausí höfundur Arithmetica — Reikningslist setti líka fram lista yfir 13 almenn atriði, „óbrigðanlegar réttarbætur, það er svo augljósar reglur að hvers og eins skilningur fær þær að meðkenna“.<sup>37</sup> Slíkur listi var óvenjulegur í hagnýtum reikningsbókum. Listinn í íslenska ritinu ber bæði nokkurt svipmót af almennu staðreyndunum í Frumatriðum Evklíðs og lista Mersennes í *Universae Geometriae*:

1. Heilt er meira sínum parti [Frumatriði, 5].<sup>38</sup>
2. Heilt er jafnt sínum pörtum öllum til samans.
3. Hvers parta allir jafnast, það er sín í milli jafnt [*Universae Geometriae*, 3].

<sup>35</sup> [Evklíð], *The Thirteen Books of Euclid's Elements* 1, bls. 155; Jón Þorvarðarson, *Og ég skal hreyfa jörðina*, bls. 284–285.

<sup>36</sup> Vef. Mersenne, *Universae Geometriae*, bls. 22–23.

<sup>37</sup> ÍB 217 4to, bls. 7 (Arithmetica — það er reikningslist).

<sup>38</sup> Tilvitnanir innan hornklofa eru til samanburðar við almennar staðreyndir í *Frumatriðum Evklíðs* og við lista Mersennes.

4. Ef jafnt tilleggst jöfnu, verður sín í millum jafnt [Frumatriði, 2].
5. Ef jafnt er jöfnu frátekið, verður jafnt eftirskilið [Frumatriði, 3].
6. Ef jafnt er með jöfnu multiplicerað [margfaldað], fram kemur það jafnt [Universae Geometriae, 1].
7. Þess sem jafnt er, þess helmingar, þriðjungar, fjórðungar etc. eru jafnir.
8. Jafnrar tölu er ferköntuð tala samjöfn.
9. Ef ferköntuð og kúbísk [teningslögðuð] tala eru sín í millum jafnar, þá eru og þeirra rætur jafnar.
10. Svo jafnast og þeirra helmingun og tvöföld tala.
11. Enginn kann fyrir sig alla tölu mæla.
12. Öll tala hefur sína mæling fyrir einingar [Universae Geometriae, 7].
13. Einingin hvorki multiplicerar [margfaldar] né dividerar [deilir].

Aðrir liðir á lista Mersennes eru svipaðir en samsvara ekki nákvæmlega liðum í íslenska listanum.

Mörg dæmi um samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu í Arithmetica — Reikningslist má finna í bókum Suevusar, Meichsners og Eulers en einnig í handritinu Arithmetica Islandica. Prentuðu bækurnar geyma þó yfirleitt fleiri dæmi en handritin. Rótardráttur kemur líka fyrir í bókunum en ekki sömu dæmin og í Arithmetica — Reikningslist.

## Samlagning

Arithmetica — það er reikningslist sýnir fjögur dæmi um samlagningu.<sup>39</sup> Um aldur Methúsalems: „Ritningin vottar að hann hafi verið 187 ára þá hann gat Lamech, og þar eftir lifað 782 [ár]. Súmmera þessar tölur og mun framkoma hans aldur.“ Árin 782 og 187 eru nefnd safnandi tölur og safnið er þá 969 ár.

1. „Ég vil vita hvað mörg ár síðan eru, að skáldið Homerus lifði. Aulus Gellius skrifar að hann lifað hafi 160 árum áður Roma var byggð, en Romaborg byggðist fyrir Christi hingaðburð 752 árum og frá því Christur fæddist og til þess nú, eru 1721 ár. Þessar tölur samanlagðar segja hvað mörg ár verið hafi síðan Homerus lifði.“ Svarið er 2633 ár.

<sup>39</sup> ÍB 217 4to, bls. 10–11 (Arithmetica — það er reikningslist).

2. Hér segir frá því að hin nafntogaða Trójuborg hafi verið niðurbrotin 1193 árum fyrir hingaðburðinn. Spurt er hve margir hafi fallið í því trójaníska stríði. Þar féllu 880.000 Grikkir og 686.000 Trójumenn eða alls 1.566.000 manns.
3. „Ég á fjóra skuldamenn, sá fyrsti er mér skyldugur um 6952 ríxort, annar um 8346, þriðji 6259, fjórði 5490. Ég vil addera [leggja saman] þessar summur í eina summu.“ Dæmið er útskýrt og svarið er 27.047.<sup>40</sup>

Sum þessara dæma er líka að finna í *Arithmetica Islandica*:

1. Dæmið um aldur Methúsalems sem varð 969 ára gamall.
2. „Ég vil vita hvað mörg ár [Ísland] hefur verið byggt? Frá því fyrst var hús á því byggt og til [pl]águnnar miklu voru 537 ár. Frá henni til þess kenning evangelii kom í ríkin 116 ár. Þaðan frá til þessa 216 ár. Operat:

537	
116	addendi
216	
869 ár	aggregatus

[...] Sést þá að landið hefur byggt verið 869 ár og ef adderuð [lögð við] er þessi summa og datum byggingarinnar sem er 864 þá verður það þessa árs datum 1733.“

3. Um mann sem lánaði tveimur mönnum.
4. „Fjórir menn voru skyldugir einum kaupmanni, sá fyrsti um 6952 ríxdali, annar um 8346, þriðji um 6259, fjórði um 5490 [...]“. Samlagningin er sýnd vera alls 27.047 ríxdalir.<sup>41</sup>

Sömu eða svipuð dæmi má finna í bókum Suevusar, Meichsners og Eulers, sjá töflu 2 á næstu síðu. Athyglisvert er að nákvæmlega sömu dæmi eru í bók Eulers og í *Arithmetica* — Reikningslist og engin önnur.

Textar af þessu tagi geyma oft einkar áreiðanlegar upplýsingar um ritunarár.<sup>42</sup> Bók Suevusar kom út árið 1593 en „núverandi ár“ í textanum er 1590. Þá hefur textinn verið í ritun. „Núverandi ár“ Meichsners er útgáfu-

<sup>40</sup> Sama heimild, sami staður.

<sup>41</sup> Lbs 1694 8vo, bls. 46v–48r [92–95] (*Arithmetica Islandica*).

<sup>42</sup> Maanen, „The ‘double meaning’ method for dating mathematical texts“.

## KRISTÍN BJARNADÓTTIR

DÆMI	SUEVUS <sup>43</sup> 1593	MEICHSNER <sup>44</sup> 1625	ARITHMETICA ISLANDICA 17196 (1733?)	ARITHMETICA — REIKNINGSLIST	EULER <sup>45</sup> 1738
Aldur Methúsalems	969 ár	969 ár	969 ár	969 ár	969 ár
„Núverandi“ ár	Ár frá sköpun heimsins 3.970 + 1590	Ár frá sköpun heimsins 3.970 + 1625	Ár frá upphafi Íslandsbyggðar 869 + 864 = 1733	Fjöldi ára frá dögum Hómers, 852 + 1721	Fjöldi ára frá dögum Hómers, 852 + 1737
Fjöldi fallinna í Trójustríðinu	1.566.000 menn			1.566.000 menn	1.566.000 menn
Fjórir menn skulda			6952, 8346, 6259, 5490 hver, alls 27.047 ríxdalir	6952, 8346, 6259 og 5490 hver, alls 27.047 ríxort	6952, 8346, 6259 og 5490 hver, alls 27.047 rúblur

Tafla 2. Samanburður á dæmum um samlagningu í nokkrum reikningsbókum.

árið 1625 og hjá Euler stendur 1737, árið áður en bókin kom út. Bók Ramusar, sem var gefin út árið 1567, sýnir einnig dæmið um Hómer og þar er 1567 „núverandi ár“.<sup>46</sup> Íslensku handritin eru hugsanlega afrit af eldri handritum. *Arithmetica — Reikningslist* telur „núverandi ár“ vera 1721 en handritið er talið vera frá 1750. Ártalið 1750 er þó ekki stutt rökum svo að vitað sé, og vera kann að handritið sé einmitt frá 1721. Ártalið 1716 stendur framan á handritinu *Arithmetica Islandica* Lbs 1694 8vo, en í handritinu sjálfu er árið 1733 talið „þessa árs datum“. Talan 1733 kemur víðar fyrir í textanum. Árið 1733 gæti verið ártal afrits rits sem samið var 1716 en úr því verður vart skorið.

Frádráttardæmin í *Arithmetica — Reikningslist* eru þrjú og fjalla um skuldir eins og tvö dæma Eulers af fjórum en með öðrum tölum. Ekkert dæmanna þar geymir sögulegt efni eins og dæmi Suevusar og Meichsners. Sýnt er hvernig nota má samlagningu og frádrátt til að prófa hvort annað.

<sup>43</sup> Vef. Suevus, *Arithmetica Historica*, bls. 22–23, 45–47.

<sup>44</sup> Vef. Meichsner, *Arithmetica Historica*, bls. 4–5.

<sup>45</sup> Vef. Euler, *Einleitung zur Rechenkunst*, bls. 32–33.

<sup>46</sup> Vef. Ramus, *Arithmeticae libri Duo*, bls. 3.

## Margföldun

Margföldun er nefnd „margfjölga“ í Arithmetica — Reikningslist. Margföldunartaflan, Abacus Pytagora, er kynnt og hvernig megi nýta hana. Fram kemur að engum þeim sem reikningslist vilji læra sé vorkennandi að læra töfluna.<sup>47</sup>

Kynnt er aðferð til að margfalda saman tvær eins stafs tölur og skal summa þeirra vera hærri en tugur. Þá er hvor talan um sig dregin frá 10. Annar hvor mismunurinn er dreginn frá hinni upprunalegu tölunni til að fá tölustafinn í tugasetinu. Mismunirnir eru svo margfaldaðir saman til að fá töluna í einingasætinu. Dæmi er tekið af  $8 \cdot 7 = 56$ .<sup>48</sup>

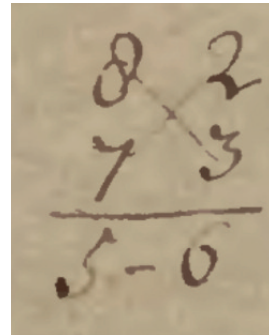
$$\begin{aligned} 10 - 8 &= 2, & 10 - 7 &= 3, \\ 8 - 3 &= 5 \text{ (og } 7 - 2 \text{ eru einnig } 5) \\ 2 \cdot 3 &= 6^{49} \end{aligned}$$

og svarið er 56! Hér er sýndur gamall húsgangur sem þekktist víða um lönd en talsverða útsjónarsemi þarf til að finna þetta út af eigin hyggjuviti.

Í öllum bókunum er útskýrt hvernig reikna megi fjölda klukkustunda í ári, en í sumum þeirra er hlauþársdegi ekki jafnað niður á árin. Það er gert í Arithmetica — Reikningslist.<sup>50</sup>

Annað dæmi fjallar um ummál jarðar. Stórhringur hennar, „jarðarinnar ysti hringur“, er  $360^\circ$ . Ein gráða á hringnum samsvarar 15 mílum á jörðinni.<sup>51</sup> Hnattlögum jarðarinnar var á þessum tíma löngu viðurkennd staðreynd og ritunum ber saman um ummál hennar, 5400 mílur. Ein dönsk sjómíla telst 7,53 km og 5400 mílur eru þá 40.662 km. Það skakkar innan við 2% sem má teljast gott á öndverðri 18. öld.

Áréttað er að 1 hvorki margfalda né deili samkvæmt 13. réttarbót sem talin var framár. Hins vegar megi margfalda tölu með 10 með því að bæta



Mynd 1. Margföldun,  $8 \cdot 7 = 56$ . Ljós. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

<sup>47</sup> ÍB 217 4to, bls. 18–19 (Arithmetica — það er reikningslist).

<sup>48</sup> Sama heimild, bls. 20.

<sup>49</sup> Sama heimild, sami staður.

<sup>50</sup> Sama heimild, bls. 22.

<sup>51</sup> Sama heimild, bls. 23–24.

0, núlli, aftan við hana og með 100 með því að bæta við tveimur núllum. Dæmi um það fylgja, m.a. um hertoga sem raðar herfylkjum upp í rétt-hyrninga, fyrst 25 manns í hverri af 10 röðum, alls 250 manns, en síðan 264 í hverri af 100 röðum, alls 26.400 manns. Athygli vekur að herfylkið telur fleiri en alla fullorðna karlmenn í upphafi 18. aldar á Íslandi.<sup>52</sup>

Eftirfarandi dæmi er einnig að finna:

Jósephus historíuskrifari í sinnar 13. bókar 15. kap. skrifar að þegar Antiochus hafi umsetið Jerúsalem, þá hafi höfuðpresturinn Hircanus samið við hann til frelsis borginni, með þeim fjársjóð sem Davíð kóngur bauð með sér að fara í sína gröf, 3000 talenta (það þýskir kalla centiner), hvert sitt að vigt við 600 krónur.

Spurt er hversu mikils virði fjársjóðurinn sé í krónum. Þetta dæmi er sett fram til að sýna að það nægir að margfalda saman 3 og 6 og bæta fimm núllum við til að finna svarið, 1.800.000.<sup>53</sup> Euler nefnir þetta atriði líka en með öðrum tölum.<sup>54</sup> Suevus sýnir sama dæmi og beitir aðferðinni en án umræðu.<sup>55</sup>

Safnað í töflu 3.

BÆKUR DÆMI	SUEVUS <sup>56</sup>	MEICHSNER <sup>57</sup>	ARITHMETICA <sup>58</sup> ISLANDICA	ARITHMETICA — REIKNINGSLIST	EULER <sup>59</sup>
Fjöldi klst. í ári	$(52 \cdot 7 + 1) \cdot 24$ $+ 6 = 8766$	$(52 \cdot 7 + 1) \cdot 24$ $= 8760$	$(52 \cdot 7 + 1) \cdot 24$ $+ 6 = 8766$	$(52 \cdot 7 + 1) \cdot 24$ $+ 6 = 8766$	$365 \cdot 24 =$ 8760
Ummál jarðar	$360^\circ \cdot 15 =$ 5400 mílur	$360^\circ \cdot 15 =$ 5400 mílur	$360^\circ \cdot 15 =$ 5400 mílur	$360^\circ \cdot 15 =$ 5400 mílur	$360^\circ \cdot 105 =$ 37.800 werste
Fjársjóður í gröf Davíðs konungs	$3000 \cdot 600 =$ 1.800.000 krónur			$3000 \cdot 600 =$ 1.800.000 krónur	

Tafla 3: Samanburður á dæmum um margföldun í fimm kennslubókum.

<sup>52</sup> Sama heimild, bls. 27.

<sup>53</sup> Sama heimild, bls. 28.

<sup>54</sup> Vef. Euler, *Einleitung zur Rechenkunst*, bls. 59–61.

<sup>55</sup> Vef. Suevus, *Arithmetica Historica*, bls. 172.

<sup>56</sup> Sama heimild, bls. 127–128, 171–172.

<sup>57</sup> Vef. Meichsner, *Arithmetica Historica*, bls. 15.

<sup>58</sup> Lbs 1694 8vo [bls. 120, 122] (*Arithmetica Islandica*).

<sup>59</sup> Vef. Euler, *Einleitung zur Rechenkunst*, bls. 69.



Nokkuð er rætt í þessum kafla um ferkantaða tölu sem nú er nefnd ferningstala. Þar segir:

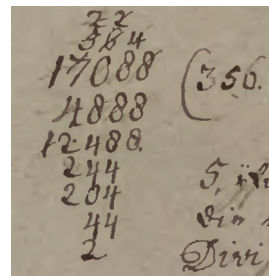
Hvör tala sem með sjálfri sér er margfölduð kallast rót en það sem af multiplicatione [margföldun] fram kemur kallast ferköntuð tala [...] En sé með rótinni aftur multiplic. [margfölduð] ferköntuð tala þá framkemur þar af Cubics [teningslaga] [...].

Dæmi er tekið af höggskógi í reit þar sem fjórir kantar eru jafnir og á hverjum kanti eru 64 eikur (eða stangir þar sem skógurinn hafði verið höggvinn). Þessir 64 eru margfaldaðir með sjálfum sér og gefa af sér 4096 sem er þá ferköntuð tala. Annað dæmi er tekið af ferkantaðri kistu sem er jöfn að lengd, dýpt og breidd. Rótin, 64, er margfölduð með sjálfri sér og aftur og verður þá 262.144 kúbísk [teningslöguð] tala. Síðan er sagt að rætt verði um ferkantaðar og kúbískar tölur í 7. kafla þessarar fyrstu bókar og í 1. kafla fjórðu bókar.<sup>60</sup> Upplýsingar þessar um fjórðu bók gefa til kynna að texta vanti aftan við handritið sem endar snögglega í þriðju bók. Um margföldun segir svo að hana megi prófa með deilingu eins og frádrátt með samlagningu.<sup>61</sup>

## Deiling

Deiling var álitin afar snúin aðgerð. „Dura cosa e la partita,“ sögðu Ítalir. Aðferðin, sem lýst er á mynd 2 í Arithmetica — Reikningslist, er stundum nefnd skútuadferðin (e. galley method) eftir lagi talnasafnsins.<sup>62</sup> Hún var notuð framan af öldum en aðferðin, sem kennd var í skólum á Íslandi á 20. öld, var komin fram í bók Eulers frá 1738.

Mynd 2. Deiling með skútuadferðinni. Dæmið fjallar um hve marga hálfu dali gjöri 17.088 skildingar, þar sem hálfur dalur jafngildir 48 p (skildingum). Þá er 48 deilt upp í 17.088. Deilirinn er ritaður endurtekið undir deilistofninum þannig að 4 og 8 eru ekki endilega ritaðir í sömu línu. Hann hverfur því smám saman inn í romsu af tölustöfum. Ljósm. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.



<sup>60</sup> ÍB 217 4to, bls. 25–26 (Arithmetica — það er reikningslist).

<sup>61</sup> Sama heimild, bls. 29.

<sup>62</sup> Sama heimild, bls. 36–37.

Sýnt er hvernig reikna skal út hlaupár í fjórum kennslubókum. Þar kemur ritunarárið fram, m.a. í *Arithmetica* — Reikningslist þar sem 1721 er talið „komandi ár“. Gyllinitala ársins er einnig reiknuð með því að bæta 1 við ártalið og deila svo með 19. Þá er notast við ártalið 1622. Afgangurinn er 8 sem táknar að árið 1622 er áttunda ár tunglaldar.<sup>63</sup> Euler tók hvorugt þessara dæma.

DÆMI	SUEVUS <sup>64</sup> 1593	MEICHSNER <sup>65</sup> 1625	ARITHMETICA <sup>66</sup> ISLANDICA 1716/1733	ARITHMETICA — REIKNINGS- LIST 1721?
Hlaupár	1591:4 = 397, afgangur 3	Kannar árin 1620–24	1733:4 = 433 afgangur 1	1721:4 = 430, afgangur 1
Gyllinitala ársins	(1591+1):19 = 83, afgangur 15		(1733 + 1):19 = 91, afgangur 5	(1622 + 1): 19 = 85, afgangur 8

Tafla 4. Samanburður á deilingardæmum í fjórum kennslubókum.

### *Ferningsrót og Pýþagórasarregla*

Ferköntuð tala er skilgreind í 7. kafla fyrstu bókar í *Arithmetica* — Reikningslist með dæmum af litlum hringjum sem raðað er upp í ferninga: 9, 16, 64. Settar eru fram leiðbeiningar í níu liðum og fyrstu níu ferningstölurnar eru síðan taldar upp.<sup>67</sup> Fyrsta dæmið um rötardrátt í *Arithmetica* — Reikningslist fjallar um að raða flokki 54.756 hermanna upp í ferningslaga fylkingu. Dregin er ferningsrót til að finna að raðirnar og fjöldinn í hverri röð er 234. Fylkingin er stærri en nemur íbúatölu Íslands á öndverðri 18. öld.

Dæmi er tekið af turni AB sem var „umgirtur með gröfum“. Nota þurfti stiga til að komast upp í efri brún turnsins frá „ytri bakka grafanna“. Hæð turnsins er 30 fet, en breidd grafanna 28 fet.<sup>68</sup> Vísað er í Pýþagórasarreglu í fyrstu bók Frumatriða Evklíðs, 47. kafla.<sup>69</sup> Reglan er ekki nefnd í saman-

<sup>63</sup> Sama heimild, bls. 34, 38.

<sup>64</sup> Vef. Suevus, *Arithmetica Historica*, bls. 175–176.

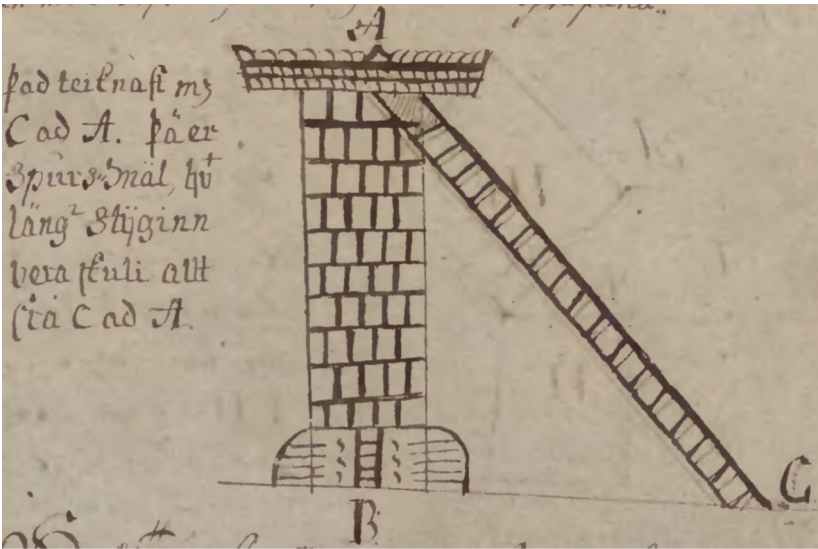
<sup>65</sup> Vef. Meichsner, *Arithmetica Historica*, bls. 25.

<sup>66</sup> Lbs 1694 8vo [bls. 136–139] (*Arithmetica Islandica*).

<sup>67</sup> ÍB 217 4to, bls. 47–50 (*Arithmetica* — það er reikningslist).

<sup>68</sup> Sama heimild, bls. 53–56.

<sup>69</sup> Sama heimild, bls. 53.



Mynd 3: Turninn er 30 feta hár. Framan við hann er 28 feta breið gröf. Ljósmynd. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

burðarbókunum. Varla hefur turn í líkingu við þann á mynd 3 fundist á Íslandi en sögur af riddurum, kóngum, drottningum og prinsessum í kastalturnum voru vafalaust kunnar.

Viðfangsefnið felst í að reikna „hve langur stiginn vera skuli“. Það er skýrt með teikningu af rétthyrndum þríhyrningi með þremur ferningum út frá hliðunum.

Hæð turnsins er 30 fet og breidd grafarinnar er 28 fet. Lengd stigans, eða hliðar þriðja ferningsins, er fundin samkvæmt reglu Pýþagórasar með því að reikna summu ferninganna af 30 og 28 og draga ferningsrót af summunni:

$$30 \cdot 30 + 28 \cdot 28 = 1684$$

Ferningsrótin af 1684 er rétt rúmlega 41:

$$1684 - 41 \cdot 41 = 3$$

Viðbótin er námunduð með almenna brotinu  $3/(2 \cdot 41 + 1) = 3/83$  án þess að því séu beinlínis gerð fræðileg skil. Lengd stigans reiknast þá  $41 \frac{3}{83}$  fet. Jafnframt segir að bæta megi við lengdina að 42 fetum og þá muni stiginn fullkomlega ná frá brún ytri grafarbakka, C, upp að toppi turnsins, A.

*Annað efni*

Önnur bók *Arithmetica* — Reikningslist, bls. 57–112, fjallar um reikni- aðgerðir með almennum brotum. Slíkt er hvorki að finna hjá Suevus né Meichsner en í bók Eulers. Ekki eru samt líkindi með brotadæmum ís- lenska ritsins og bók Eulers.

Þriðja bók hefst á bls. 113 með umfjöllun um hlutfallareikning í formi þríliðu og afbrigðum af henni. Umfjölluninni er ekki lokið þegar handrit- inu lýkur snögglega á bls. 132. Nokkur ruglingur er á tölusetningu kafla. Ruglingurinn gæti verið vísbending þess að ritið sé ekki bein þýðing er- lends rits heldur að einhverju leyti frumsamið en þó með hliðsjón af öðrum ritum. Dæmin eru ekki úr helgri bók eða góðum sögubókum heldur bera vott um um mið- og norður-evrópskt umhverfi. Nokkur dæmi að lokum vitna um það.

Dæmi er af hertoga með sínu liði, 3000 stríðsmönnum, með herliði um- kringdum, sem hafði lagt fyrir kost sem nægja skyldi í sjö mánuði. Hve marga stríðsmenn gat hertoginn þá alið á sama kosti ef umsátrið skyldi vara í 12 mánuði?<sup>70</sup>

Dæmi er tekið um kaupmenn sem eiga í samlagi. Þeir höfðu lagt fram 120, 200 og 240 mörk hver og skiptu milli sín 7000 marka ábata í sömu hlutföllum og framlögin.<sup>71</sup> Aðrir kaupmenn höfðu keypt skip sem brotnaði en framlög þeirra til kaupanna höfðu verið mismikil, talin í gullpeningum, og skyldi tap hvers miðast við þau.<sup>72</sup>

Þá ferðuðust fjórir stúdentar úr framandi plássi í skóla til að iðka bók- legar listir. Höfðu þeir meðferðis gullpeninga, mismarga, sem þeir lögðu til samans. Þar kom að 120 gullpeningum af heildarsummunni 240 peningum var stolið og spurt hvernig tapið skyldi deilast á stúdentana.<sup>73</sup>

Dæmi er um fjóra kjötmangara sem skiptu með sér haglendi fyrir 62 verðeiningar. A beitti síðan 20 nautum í 18 vikur, B 48 nautum í 21 viku og C 27 nautum í 16 vikur. Skipta þarf kostnaðinum og taka tillit til tíma- lengdarinnar.<sup>74</sup>

<sup>70</sup> Sama heimild, bls. 122.

<sup>71</sup> Sama heimild, bls. 125.

<sup>72</sup> Sama heimild, bls. 125–126.

<sup>73</sup> Sama heimild, bls. 126.

<sup>74</sup> Sama heimild, bls. 128.

Þá er dæmi um vínsölumann sem blandaði saman góðu og slæmu víni, þar sem hið lakara, sem enginn vildi, kostaði 6 skilinga en hið betra 13 skilinga. Hann vildi selja blönduna á 8 skilinga og setti því  $5/7$  hluta blöndunnar af slæma víninu en  $2/7$  hluta af því góða. Einnig er nefndur til sögunnar gullsmiður sem blandaði saman þremur misdýrum gullblöndum og vildi finna meðalverð.<sup>75</sup>

## Umræða

Ritið *Arithmetica* — Reikningslist er greinilega tengt ritunum *Arithmetica Historica* — Die löbliche Rechenkunst eftir Suevus frá 1593 og *Arithmetica Historica* — Das is Rechenkunst eftir Meichsner frá 1625, báðum frá borgum mótmælenda, Breslau og Rothenburg ob der Tauber. Í þýsku bókunum er þó t.d. ekki reikningur með almennum brotum. *Arithmetica* — Reikningslist geymir líka dæmi sameiginleg með Rechenkunst Eulers. Euler helgar allan annan hluta bókar sinnar nefndum tölum, „benannten Zahlen“, mynt- og mælieiningum, sem *Arithmetica* — Reikningslist nefnir ekki, og Suevus og Meichsner fara hratt yfir það efni. Enn fremur er bók Eulers frá 1738 sennilega rituð á eftir *Arithmetica* — Reikningslist. Textinn virðist staðfesta að hún hafi verið rituð árið 1721.

Líta má á þýsku bækurnar tvær, *Arithmetica Historica*, sem viðleitni til að mennta alþýðu í reikningi innan ramma helgrar bókar og góðra bókmennta. *Arithmetica* — Reikningslist er endurómur af þeim. Fleiri bækur af svipuðum uppruna hafi líklega verið í umferð á svæði mótmælenda. Höfundur íslenska ritsins vildi vera fræðilegur á nútímalegan hátt. Hann notaði rök kalvínistans Stevins og húgenottans Ramusar til að mótmæla viðtekinni skoðun um að einn sé ekki tala. Hann setti líka fram fræðilegan grundvöll eins og Evklíð gerði, endurskoðaðan í anda Mersennes. Mersenne aðhylltist nútímalegar hugmyndir Galíleós Galílei og var vinur Descartes sem andæfði skólaspeki og einsetti sér að trúá einvörðungu því sem hann hafði sannreynt sjálfur.

Mótmælahreyfingar 16. og 17. aldar virðast hafa verið jarðvegur fyrir nýja hugsun í menningar- og menntamálum. Óþekkti Íslendingurinn, Suevus, Meichsner, Stevin, Ramus, Mersenne og Euler virðast allir hafa

<sup>75</sup> Sama heimild, bls. 130–131.

beitt sér gegn staðnaðri menntastefnu með latínulærdóm fyrir útvalda. Þeir færðu menntunina nær almenningi með móðurmálinu, höfnuðu aldagamalli talnahugmynd en slitu þó ekki taugina til hins gamla eins og „óbrigðanlegu réttarbæturnar“ bera vott um.

Arithmetica — Reikningslist var ekki samin með tilliti til viðskipta með íslenskar vörur í íslenskum verðeiningum. Dæmin fjalla um evrópskt efni, sviðið er erlent og söguheimurinn menntamanna. Vitnað er í evrópskan menningararf, m.a. Frumatriði Evklíðs: 1. bók, 47. kafla, um Pýþagórasarreglu, og 7. bók, skilgreiningu 2, um talnahugtakið. Enn fremur eru nefndar almennu staðreyndirnar úr 1. bók þótt ekki sé vitnað beint í Frumatriði. Höfundur vitnar einnig til Arkimedesar og sandkornatölu hans og raunar einnig til Aristótelesar um öfuga þríliðu.<sup>76</sup>

Hver er þá höfundur ritsins Arithmetica — Reikningslist og hvaðan fékk hann hugmyndina að því? Framangreind einkenni eru helstu vísbendingar þegar spurt er hver tók efnið saman á íslensku. Tveir menn koma einkum til greina, þeir Jón Árnason (1665–1743) Skálholtsbiskup og Magnús Arason Thorkelin (d. 1728) sjóliðsforingi.

Jón Árnason biskup samdi *Fingrarím* (útg. 1728) til að fylgjast með tímatali eftir að nýi stíll, gregoríanska tímatalið, var innleiddur á Íslandi árið 1700. Formáli hans ber vott um áhuga á menntun almennings. Þar skrifaði hann:

Það er angur að vita að fingrarímskonstin er mestan part útdauð hér á landi, sem þó var í mínu ungdæmi almenniliga iðkuð og um hönd höfð: margir ólærðir menn og kvinnur gátu í einum svip útreiknað á fingrunum bæði tunglkveikingar og hátíðakomur [...].<sup>77</sup>

Biblúlegt ívaf dæmanna í Arithmetica — Reikningslist gæti bent til klerks, t.d. Jóns biskups, en þess ber þó að gæta að þau dæmi eru öll af sömu rót runnin, bók Suevuser. Jón biskup Árnason hafði samt hvort tveggja til að bera, þekkingu á guðfræði og stærðfræði, og berast böndin því að honum sem líklegum höfundi ritsins. Mikið er til af heimildum um hann, en ekki er vitað um kennslubók í reikningi frá hans hendi. Hann lét prenta *Fingrarím* í Kaupmannahöfn og hefði átt hægar en aðrir með að láta prenta reikningsbók ef honum hefði sýnst svo.

<sup>76</sup> Sama heimild, bls. 121.

<sup>77</sup> Jón Árnason, *Dactylismus ecclesiasticus eður Fingra-Rím*, bls. 11.

Magnús Arason Thorkelin varð stúdent frá Skálholtsskóla árið 1700. Hann nam síðan í tvo vetur hjá sr. Páli Björnssyni í Selárdal. Magnús las stærðfræði við Hafnarháskóla frá 1705, m.a. hjá stjórnfræðingnum Ole Rømer. Magnús skrifaði þar fimm smáritgerðir stærðfræðilegs efnis á árabílinu 1707–1710. Eftir dauða Ole Rømers árið 1710 gekk Magnús í herþjónustu. Hann var sendur til Íslands árið 1721 til landmælinga en drukknaði 1728.<sup>78</sup> Magnús Arason var mikill tungumálamaður og kunnig ensku, þýsku, hollensku og frönsku og bjó auk þess yfir hefðbundinni kunnáttu stúdenta í dönsku, latínu og grísku.<sup>79</sup> Dvöl Magnúsar með Ole Rømer bendir til að hann hafi haft aðgang að helstu stærðfræðiritum þess tíma. Menntun hans sem herföngja bendir líka til þess að hann hafi þekkt til verka Stevins sem ritaði um herstjórnarlist, landmælingar og talna-reikninga. Konunglega bókasafnið í Kaupmannahöfn geymir margar bækur eftir Stevin, útgefnar 1586, 1604, 1605, 1608, 1624, 1626 o.s.frv. Ritið er þó ekki sniðið eftir L'Arithmetique Stevins sem er mun fræðilegra rit. Veturinn 1720–1721 var Magnús að undirbúa ferð sína til Íslands og hefur þá getað tekið ritið saman. Hin staðgóða stærðfræðileg þekking sem fram kemur í *Arithmetica — Reikningslist* gerir Magnús Arason að álitlegum valkosti sem höfundur, en engar heimildir hafa þó fundist sem benda til þess eða áhuga hans á kennslu.

Hver sem höfundur *Arithmetica — Reikningslist* hefur verið er ljóst að hann var vel að sér í reikningslist og kunnugur erlendum bókum um það efni. Líklegt er að fyrirmyndin hafi verið þýsk bók. Bæði eru bækur Suevusar og Meichsners á þýsku og a.m.k. einu sinni segir að „hinir þýsku“ noti orðið „centiner“ yfir mynt. Á tímum einokunarverslunarinnar voru samskipti Íslendinga að miklu leyti bundin við Dani, en Danir voru í nánum tengslum við þýskumælandi íbúa í hertogadæmunum og víðar í norðan-verðu Þýskalandi.

Niðurstaðan er að *Arithmetica — Það er reikningslist* hafi verið samin með hliðsjón af erlendu riti, t.d. þýskri bók sem byggð var á ritum Suevusar og Meichsners. Höfundur hennar hefur verið handgenginn hefð evrópskra reikningsbóka, verið tilbúinn að kynna nýjar hugmyndir um talnahugtakið, en jafnframt talið rétt að leggja fræðilegan grunn undir reikningsfræðin með hinum „óbrigðanlegu réttarbótum“, almennu stað-

<sup>78</sup> Páll Eggert Ólason, *Íslenskar æviskrár* III, bls. 405–406.

<sup>79</sup> Páll Eggert Ólason og Þorkell Jóhannesson, *Saga Íslendinga* VI, bls. 264–266.

reyndunum sem byggðar eru á Frumatriðum Evklíðs og bera vott um þekkingu á fornum fræðum.

## *Þakkir*

Margir velviljaðir aðilar hafa aðstoðað höfund við ritun þessarar greinar. Fyrstan má nefna Albrecht Heefer, prófessor við Háskólann í Ghent í Belgíu, sem er gjörkunnugur ritum Eulers. Hann benti á vefsíður með ritum Suevusar, Meichsners, Mersennes og Ramusar og sýndi leit að sögulegum dæmum mikinn áhuga. Dr. Harm Jan Smid fletti upp í skrá Háskólans í Leiden til að leita Íslendinga þar og útvegaði aðgang að handrita- og fornbókasafni háskólans. Jenneke Krüger, námsefnisráðgjafi við SLO, hollensku námskrárþróunarstofnunina, og nýdoktor, spjallaði við höfund um hollenskar kennslubækur í stærðfræði frá 18. öld og fyrr. Jan van Maanen, forstöðumaður Freudenthal Institute í Utrecht, veitti margvíslegan stuðning og spjallaði við höfund löngum stundum. Ingi Sigurðsson bauð höfundi að flytja erindi um Arithmetica — það er reikningslist á málþingi Félags um átjándu aldar fræði í febrúar 2008. Reynir Axelsson stærðfræðingur aðstoðaði við þýðingu og skilning á riti Grosses. Loftur Guttormsson ritstjóri og tveir ritrýnar veittu góðar ábendingar og ómetanlega hjálp við lestur handrita. Öllu þessu fólki eru færðar bestu þakkir.

## HEIMILDIR

### *Óútgefin gögn*

*Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn*

Handritadeild

Lbs 409 8vo. *Stutt undirvísan um Arithmetiam Vulgarem eða almenniliga reikningslist* (skráð 1770-1780).

Lbs 1694 8vo. *Arithmetica Islandica* (1716/skr. um 1733?).

Lbs 1318 8vo. *Limen Arithmeticum eður einfaldlegur inngangur til réttilegs náms og brúkunar þeirrar nafnfrægu reikningslistar* (Stefán Einarsson 1736, handrit 1777).

ÍB 35 fol. *Gandreid* (1660, skr. 1770–80).

ÍB 217 4to. *Arithmetica — það er reikningslist* (1721, skr. c. 1750).

### *Af vef*

Euler, Leonhard, *Einleitung zur Rechenkunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg* (St. Petersburg: [s.n.] 1738),



- mathematik.uni-bielefeld.de*, sótt 10. nóvember af <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sieben/euler/Rechenkunst.ocr.pdf>.
- Meichsner, Georg, *Arithmetica Historica. Das ist: Rechenkunst durch alle Species vnnd fürnembsten Regeln, mit schönen Denckwürdigen Historien vnd Exemplis auß H. Göttlicher Schrift, vnd guten Geschichtbüchern genommen, sampt deroselben bedeutung [...]* (Rothenburg an der Tauber: [s.n.] 1625), *daten.digitale-sammlungen.de*, sótt 10. nóvember 2016 af <http://daten.digitale-sammlungen.de/~db/0002/bsb00024522/images/>.
- Mersenne, Marin, *Universae Geometriae, Mixtaeque Mathematicae Synopsis, et Bini Refractionum Demonstratarum Tractatus. Studio et Opera F.M Mersenni M.* (Paris: [s.n.] 1644), *gallica.bnf.fr*, sótt 10. nóvember 2016 af <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81532v.zoom.r=mersenne+universae.f57.langEN>.
- Ramus, Petrus, [Pierre de la Ramée], *Arithmeticae libri Duo: Geometriae XXVII.* (Basel: [s.n.] 1569), *nbn-resolving.de*, sótt 10. nóvember af <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:12-bsb00022025-2>.
- Suevus, Sigismund, *Arithmetica Historica. Die löbliche Rechenkunst. Durch alle Species und fürnembste Regeln mit schönen gedenckwürdigen Historien und Exempeln; auch mit Hebraischer, Grichischer, und Römischer Müntze, Gewicht und Mass, deren in heiliger Schrift und guten Geschichtbüchern gedache wird, der lieben Jugend zu gutte erkleret. Auch denen die nicht Rechnen können, wegen vieler schönen Historien und derselbigen bedeutungen lustig und lieblich zu lesen. Aus viel gutten Büchern und Schrifften mit fleis zusammen getragen* (Breslaw: G. Bawman 1593), *archive.org*, sótt 10. nóvember 2016 af <http://www.archive.org/details/arithmetichisto00suev>.

### Prentuð gögn

- Al-Kwārizmī, Muhammad Ibn Mūsā, *Le Calcul Indien. (Algorismus) / Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi ; histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle par André Allard.* Útg. André Allard (París: Societé des Études Classiques. Librairie scientifique et technique 1992).
- Cocker, Edward, *Arithmetick* (London: [s.n.] 1677).
- Einar H. Guðmundsson, „Gísli Einarsson skólameistari og vísindaáhugi Íslendinga á 17. öld“ *Saga* 36 (1998), bls. 185–201.
- [Evlíð], *The Thirteen Books of Euclid's Elements. I–III.* Útg. Thomas L. Heath. Þýtt eftir texta Heibergs. 2. útg. endurskoðuð með viðbótum (New York: Dover Publications 1956).
- Grosse, Hugo, *Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts mit 5 Titelabbildungen* (Wiesbaden: Dr. Martin Sändig 1965) [Frumútgáfa Bad Godesberg: Genehmigung des Verlages Dürsche Buchhandlung 1901].
- Hatton, Edward, *Lijted Agrip Vmm þær Fioorar Species I Reiknings Konstenne* (Hólum: Hólaprent 1746).

- Hauksbók*. Útg. Finnur Jónsson (Kaupmannahöfn: Det Kongelige Nordiske Oldskrift-Selskab 1892–1896).
- Hörður Ágústsson og Kristján Eldjárn, *Skálholt, skríði og áhöld* (Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag 1992).
- Jón Árnason, *Dactylismus ecclesiasticus eður fingra-rím, viðvíkjandi kirkju-ársins tímum*. Öbreytt eftir útgáfunni frá 1739 (Kaupmannahöfn: P. Jónsson 1838). (Ljósprentuð endurútg. Lithoprent 1946).
- Jón Helgason, „Bókasafn Brynjólfs biskups“. *Árbók Landsbókasafns Íslands* 3–4 (1948), bls. 115–147.
- Jón Þorvarðarson, *Og ég skal hreyfa jörðina — forngrísku stærðfræðingarnir og áhrif þeirra* (Reykjavík: STÆ 2005).
- Katz, Victor J., *A History of Mathematics. An Introduction* (New York: Harper Collins 1993).
- Kristín Bjarnadóttir, „The numbers one and zero in northern European textbooks“. *The International Journal for the History of Mathematics Education* 2:2 (2007), bls. 3–20.
- Kristín Bjarnadóttir, „History of arithmetic teaching“, *International Handbook on the History of Mathematics Education*. Ritstj. Gert Schubring og Alexander Karp (New York: Springer Verlag 2014), bls. 431–458.
- Kristín Bjarnadóttir, „Stutt undirvisun í Reikningslistinni og Algebra. Leitað höfundar“. *Skírnir* 189 (haust 2015), bls. 532–547.
- Lýður Björnsson, „Glefsa úr Gandreið“. *Fréttabréf Félags raungrainakennara* 10:1 (1993), bls. 13–17.
- Maanen, Jan van, „The ‘double meaning’ method for dating mathematical texts“. *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*. Útg. M. Folkerts og J. P. Hogendijk (Amsterdam: Rodopi 1993).
- Matthisen, Søren, *Compendium Arithmeticum* (Kaupmannahöfn: Christian Gertsens 1689).
- Páll Eggert Ólason, *Íslenzkar æviskrár frá landnámstímum til ársloka 1940 III* (Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag 1950).
- Páll Eggert Ólason og Þorkell Jóhannesson, *Saga Íslendinga VI. Tímabilið 1701–1770* (Reykjavík: Menntamálaráð og Þjóðvinafélag 1943).
- Rashed, Roshdi, „Préface“, *Le Calcul Indien. (Algorismus)*. Útg. André Allard (Paris: Societé des Études Classiques. Librairie scientifique et technique 1992).
- Skúli Magnússon, „Skúli Magnússon“. *Merkir Íslendingar II* (Reykjavík: Bókfellsútgáfan 1947), bls. 37–64.
- Stevin, Simon, *L'Arithmétique* (Leiden: [s.n.] 1585). *The principal works of Simon Stevin II B. Mathematics*. Útg. D. J. Struik (Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger 1958).
- The Earliest Arithmetics in English*. Útg. Robert Steele (Millwood, N.Y.: Kraus Reprint 1988).
- Ulf-Møller, Jens, „Stefán Einarssons Isländisches Rechenbuch von 1736.“ *Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit: Tagungsband zum wissenschaftlichen Kolloquium „Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit“ von 18. — 20. April 2008 in der Berg- und Adam-ries-Stadt Annaberg-Buchholz* (Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund 2008), bls. 215–233.

## SUMMARY

Arithmetic textbooks, which appeared in Iceland in the eighteenth century in print and in manuscripts, adhered to the pattern of European practical textbooks, originating among Italian merchants in the late Middle Ages. Their content was numeration, the four arithmetic operations and relevant methods, measuring units and currency, extraction of roots, sequences, ratio and proportions.

The Icelandic manuscript *Arithmetica — það er reikningslist* [Arithmetica — That is arithmetic art] from 1721 deviates from this pattern in that it does not contain measurements and currency. It treats thoroughly the number concepts and common notions, which are usually only found in theoretical textbooks on arithmetic. The manuscript does not refer to the Icelandic context in any respect. No particular model for it has been found. There are, however, similarities with textbooks written in German by the authors Suevus and Meichsner, both titled *Arithmetica Historica*, published in protestant towns and written with respect to the Holy Script and good history books. Furthermore, the manuscript bears some resemblance to textbooks by Euler, the French philosopher and Huguenot Ramus, and the Dutch mathematician and Calvinist Stevin. The sixteenth century Protestant movements seem to have been a fertile ground for new thinking in educational matters.

The chapter concludes with a discussion on two possible authors of *Arithmetica — það er reikningslist*: Bishop Jón Árnason and naval officer Magnús Arason Thorkelin. The arithmetic problems relate to European content and the world of educated people. The unknown author must have been well acquainted with European cultural currents and heritage, such as Euclid's *Elements*.